

Année 1975

THÉORÈME DE HARDY SUR LES ZÉROS DE LA CÉLÈBRE FONCTION ζ DE RIEMANN

ÉNONCÉ

Préambule

Les propriétés suivantes de la fonction Γ pourront être utilisées sans démonstration; elles n'interviennent pas dans la première partie du problème.

Soit s un nombre complexe; on note $\operatorname{Re}(s)$ sa partie réelle, $\operatorname{Im}(s)$ sa partie imaginaire. Pour $\operatorname{Re}(s) > 0$, on pose :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

La fonction Γ est holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$. Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans \mathbb{C} dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Ces pôles sont simples, et le résidu de Γ au point $s = -p$, ($p \in \mathbb{N}$), est $\frac{(-1)^p}{p!}$.

Si s n'est pas un pôle, on a : $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$, et : $\Gamma(s) \neq 0$.

Soient σ_1, σ_2 des nombres réels tels que $\sigma_1 \leq \sigma_2$ et m un entier positif; on a : $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} |t^m \Gamma(\sigma + it)| = 0$, uniformément pour σ élément de $[\sigma_1, \sigma_2]$.

Enfin, si c et x sont des nombres réels strictement positifs, on a :

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=c} x^{-s} \Gamma(s) ds,$$

la droite $\operatorname{Re}(s) = c$ étant orientée dans le sens des ordonnées croissantes. (Cette convention d'orientation est conservée pour toutes les intégrales analogues apparaissant dans le problème).

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\text{Arg}(z)$ l'unique détermination de l'argument de z qui appartient à $[-\pi, \pi[$, et on pose : $\text{Log}(z) = \text{Log}|z| + i \text{Arg}(z)$, puis, pour tout nombre complexe a : $z^a = e^{a \text{Log}(z)}$.

Dans tout le problème, \mathcal{R} désigne l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive.

Soit λ un réel strictement positif; une fonction f définie dans \mathcal{R} est dite périodique, de période λ , si, quel que soit $z \in \mathcal{R}$, on a : $f(z + \lambda) = f(z)$.

PREMIÈRE PARTIE

1° Soit f une fonction définie dans \mathcal{R} , holomorphe et périodique de période λ .

a. Démontrer qu'il existe une fonction g , définie et holomorphe dans l'ouvert :

$$\{z \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < |z| < 1\},$$

telles que

$$g(e^{2i\pi z/\lambda}) = f(z).$$

b. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{R}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0 + \lambda} f(t + iy_0) e^{-2i\pi n(t + iy_0)/\lambda} dt.$$

Démontrer que a_n est indépendant de z_0 , et que

$$(2) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n z/\lambda},$$

la convergence de cette série étant uniforme sur toute partie compacte de \mathcal{R} . La fonction f est dite holomorphe (resp. méromorphe) à l'infini si la fonction g est holomorphe (resp. méromorphe) en zéro; donner les conditions sur les a_n pour qu'il en soit ainsi. Dans la suite, on dira que les a_n sont les coefficients de Fourier de f .

c. On suppose qu'il existe deux constantes positives c et ρ telles que, quel que soit $z = x + iy \in \mathcal{R}$, avec $y \leq 1$, on ait

$$(3) \quad |f(x + iy)| \leq c y^{-1-\rho}.$$

Démontrer que

$$(4) \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}^*} |a_n| |n|^{-\rho-1} < +\infty.$$

2° a. Soit $\rho > 0$. Montrer que la suite u définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = n^\rho \frac{n!}{(\rho+1)(\rho+2) \cdots (\rho+h) \cdots (\rho+n)}$$

est bornée.

(On pourra utiliser la série de terme général $\text{Log} \frac{u_{n+1}}{u_n}$).

b. Soit

$$(a_n)_{n \geq 0}$$

une suite de complexes. On suppose l'existence d'un réel ρ , strictement positif, tel que :

$$(5) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |a_n| n^{-\rho} < +\infty$$

et l'on considère l'application f , de \mathcal{R} dans \mathbb{C} , définie par

$$(6) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n z/\lambda}$$

Montrer que f est holomorphe et que (3) est vérifiée pour une valeur convenable de la constante positive c .

Montrer que, pour tout réel γ strictement positif, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma |f(it) - a_0| = 0.$$

DEUXIÈME PARTIE

Soient λ un réel strictement positif et $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que (5) soit vérifiée. On définit f par (6), et l'on pose, pour $\text{Re}(s) > \rho + 1$,

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}, \quad \Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s)$$

1° a. Montrer que φ est holomorphe pour $\text{Re}(s) > \rho + 1$.

b. Montrer, avec soin, que

$$\Phi(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} (f(it) - a_0) dt \quad \text{pour } \text{Re}(s) > \rho + 1,$$

et qu'inversement, pour $\alpha > \rho + 1$ et $\gamma > 0$, on a

$$f(i\gamma) - a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \gamma^{-s} \Phi(s) ds$$

$$\operatorname{Re}(s) = \alpha$$

c. Montrer que $s^2 \Phi(s)$ est bornée sur toute « verticale » du demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \rho + 1$.

2° Soient ε et k des réels tels que $|\varepsilon| = 1$ et $k > 0$. On suppose que Φ possède les propriétés suivantes [A] et [B] :

[A]. Notant ω l'ensemble des complexes distincts de 0 et de k , la fonction Φ admet un prolongement holomorphe à ω , et ce prolongement, noté encore Φ , vérifie : ($\forall s \in \omega$) ($\Phi(s) = \varepsilon \Phi(k - s)$).

[B]. La fonction $s \mapsto \Phi(s) + a_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{k-s} \right)$ se prolonge en une fonction entière de s , et est bornée sur toute bande « verticale ».

a. Soit α un réel tel que $\alpha > \rho + 1$ et $\alpha > k$. On note U la partie de \mathbb{C} , ensemble des complexes s tels que

$$k - \alpha \leq \operatorname{Re}(s) \leq \alpha \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(s)| \geq 1$$

Montrer que $s^2 \Phi(s)$ est bornée sur la frontière de U , puis que $s^2 \Phi(s)$ est bornée dans U .

[On pourra utiliser le résultat précédent et considérer, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $s \mapsto e^{\alpha s^2} s^2 \Phi(s)$; on rappelle l'énoncé : *Principe du maximum* : Soit V un ouvert borné de \mathbb{C} . Soit g une fonction définie et continue dans l'adhérence de V et holomorphe dans V . Si ∂V désigne la frontière de V , on a $\sup_{z \in V} |g(z)| = \sup_{z \in \partial V} |g(z)|$.

b. Pour tout réel γ , strictement positif, on pose :

$$I(\gamma) = \int \gamma^{-s} \Phi(s) ds \quad \text{et} \quad J(\gamma) = \int \gamma^{-s} \Phi(s) ds$$

$$\operatorname{Re}(s) = k - \alpha$$

$$\operatorname{Re}(s) = \alpha$$

Montrer que $I(\gamma) = \varepsilon \gamma^{-k} J\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ et expliciter $J(\gamma) - I(\gamma)$.

c. Dédire de b. que f possède la propriété suivante :

$$[C]. \quad f(z) = \varepsilon \left(\frac{z}{i} \right)^{-k} f\left(-\frac{1}{z}\right).$$

3° Conservant les notations du paragraphe précédent, montrer que si f possède la propriété [C], alors Φ possède les propriétés [A] et [B]. (On pourra utiliser l'expression de $\Phi(s)$ obtenue en (II 1° b.) et faire intervenir le point 1 de l'intervalle d'intégration.)

4° Pour tout élément z de \mathcal{A} , on pose :

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}$$

a. Calculer, pour t réel strictement positif et γ réel, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t} e^{-2i\pi x \gamma} dx$$

(On pourra utiliser, sans la démontrer, l'égalité $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

b. Pour t réel strictement positif et x réel, on pose :

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(x+n)^2 t}.$$

La fonction ψ est une fonction périodique de la variable réelle x . Préciser sa série de Fourier et montrer que celle-ci converge vers ψ .

En déduire l'égalité $\theta(it) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(-\frac{1}{it}\right)$.

c. Dans l'hypothèse $\left(\lambda = 2, k = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1\right)$ et en choisissant une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ convenable, montrer que θ possède la propriété [C].

d. Pour tout complexe s tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$, on pose :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$$

Dédire de l'étude précédente certaines propriétés de la fonction ζ .

TROISIÈME PARTIE

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : lorsque $|t|$ tend vers l'infini (t réel), on a :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |\Gamma(\sigma + it)| (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi|t|}{2}} |t|^{\frac{1}{2}-\sigma} = 1,$$

uniformément pour σ appartenant à une partie compacte de \mathbb{R} .

1° Soient σ_1, σ_2 des nombres réels vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$, U (resp. V) la partie de \mathbb{C} définie par les inégalités $\sigma_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma_2$ et $|\operatorname{Im}(s)| \geq 1$ (resp. $\sigma_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma_2$ et $\operatorname{Im}(s) \geq 1$).

Soit h (resp. l) une fonction définie et holomorphe au voisinage de U (resp. V). On suppose qu'il existe des réels positifs α, β_1, β_2 tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{s \in U} |h(s)| e^{-\alpha|s|} < +\infty \\ \sup_{|t| \geq 1} |t|^{-\beta_j} |h(\sigma_j + it)| < +\infty \quad (j=1, 2). \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{resp.} \left\{ \begin{array}{l} \sup_{s \in V} |l(s)| e^{-\alpha|s|} < +\infty \\ \sup_{t \geq 1} t^{-\beta_j} |l(\sigma_j + it)| < +\infty \quad (j=1, 2). \end{array} \right. \right)$$

Soit L la fonction affine telle que : $L(\sigma_j) = \beta_j$, ($j=1, 2$).

Démontrer qu'il existe un réel M tel que, quel que soit $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, on ait :

$$\sup_{|t| \geq 1} |t|^{-L(\sigma)} |h(\sigma + it)| \leq M \quad (\text{resp. } \sup_{t \geq 1} t^{-L(\sigma)} |l(\sigma + it)| \leq M).$$

(On se ramènera à démontrer le résultat concernant V et l , puis, en divisant l par la fonction $\left(\frac{s}{t}\right)^{L(s)}$, on se ramènera au cas où : $\beta_1 = \beta_2 = 0$).

On reprend maintenant les notations et hypothèses de la deuxième partie.

La fonction f vérifie \square et n'est pas constante.

Soit m un entier strictement positif tel que $a_m \neq 0$.

Soit Z une primitive de $s^{\frac{h-1}{2}} m^s \varphi(s)$, dans le quart de plan :

$$\operatorname{Re}(s) > 0, \quad \operatorname{Im}(s) > 0.$$

2° On donne des réels σ_1, σ_2 vérifiant : $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, et l'on note V la partie de \mathbb{C} définie par : $\sigma_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma_2$ et $\operatorname{Im}(s) \geq 1$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $Z(s)e^{-\alpha|s|}$ soit bornée sur V .

3° Soit σ un réel tel que $\sigma > \rho + 1$. Démontrer que, pour a réel, on a : $\sup_{t \geq 1} t^{-a} |Z(\sigma + it)| < +\infty$ si, et seulement si : $a \geq \frac{k+1}{2}$.

4° a . Démontrer que, quel que soit σ réel, il existe $a > 0$ tel que $\sup_{|t| \geq 1} |t|^{-a} |\varphi(\sigma + it)| < +\infty$.

(On utilisera la question 1° en prenant σ_2 strictement supérieur, en particulier, à $\rho + 1$, et : $\sigma_1 = k - \sigma_2$).

b . Démontrer que, pour σ réel ($\sigma > \rho + 1$) et z élément de \mathcal{R} , on a :

$$f(z) - a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} \left(\frac{z}{t}\right)^{-s} \Phi(s) ds.$$

c . Évaluer l'intégrale suivante, pour z élément de \mathcal{R} :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\frac{k}{2}} \left(\frac{z}{t}\right)^{-s} \Phi(s) ds.$$

On suppose désormais que les coefficients de Fourier de f (1° b .) sont réels, qu'il existe $\beta \in \left[0, \frac{k+1}{2}\right]$ tel que, lorsque u tend vers 0 par valeurs strictement positives, $u^\beta |f(e^{iu})|$ reste borné et qu'enfin la fonction φ n'a qu'un nombre fini de zéros sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \frac{k}{2}$.

5° a . Démontrer que $i^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \Phi(s)$ est réel pour $\operatorname{Re}(s) = \frac{k}{2}$, et que, lorsque u tend vers 0 par valeurs strictement positives,

$$u^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} \left| \Phi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt \quad \text{reste borné.}$$

b . En déduire que, lorsque T , réel, tend vers $+\infty$,

$$T^{-\beta} \int_0^T t^{\frac{h-1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt \quad \text{reste borné.}$$

c . Démontrer que : $\sup_{t \geq 1} t^{-\rho} \left| Z\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| < +\infty$.

Quelle conclusion peut-on tirer des calculs précédents ?

6° Les notations sont celles de la dernière question de la deuxième partie.

a . Établir, pour z élément de \mathcal{R} , l'égalité :

$$\theta\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 z}.$$

b . Démontrer que la fonction ζ a une infinité de zéros sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$.